Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

Semester: Wintersemester 2020/2021

FSP-Teilprüfung: Mathematik T2

Datum: 30.11.2020

Dauer: 90 Minuten

Prüfer: Dr. Jens Siebel, Bertram Heimes, Julia Mayer, StD. Werner Müller, Jörg Wilhelm

Aufgabe 1 (Heimes)

Wir haben die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 2 \cdot i$ und $z_2 = -4 - 5 \cdot i$.

a) Schreiben Sie z_1 und z_2 jeweils in trigonometrischer Form und in Exponentialform. Rechnen Sie auf drei Nachkommastellen genau *(4 Punkte)*.

b) Berechnen Sie jeweils in kartesischer Form:

b1) $z_1 \cdot z_2$ *(1 Punkt)*,

b2) $\frac{z_1}{z_2} + z_1$ *(2 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen w von $w^3 = z_1$. Rechnen sie auf drei Nachkommastellen genau *(3 Punkte)*

Aufgabe 2 (Dr. Siebel)

Lösen Sie folgendes Randwertproblem:

$f''(x) - 2 \cdot f'(x) + f(x) = x^2 - 1,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 1$ *(10 Punkte)*.

Aufgabe 3 (Dr. Siebel)

Kreuzen Sie jeweils das Feld ☐ mit der einzigen richtigen Alternative an.

richtige Antwort: 1 Punkt falsche bzw. fehlende Antwort: 0 Punkte

a)	$z=\sin(\pi/2)\cdot e^{i\cdot\pi} \Leftrightarrow$			
	$\overline{z}=1$ ☐	$\overline{z}=i$ ☐	$\overline{z}=-1$ ☐	$\overline{z}=-i$ ☐
b)	$\int_1^a x\,dx=1$ mit $a=$			
	$\sqrt{2}$ ☐	0 ☐	$\sqrt{3}$ ☐	-1 ☐
c)	Der Winkel zwischen $\vec{a}=\begin{pmatrix}\sin(\pi/2)\\ e^0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}\lvert 1-i\rvert\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ ist $\varphi=$			
	$0°$ ☐	$90°$ ☐	$135°$ ☐	$180°$ ☐
d)	Für $f^{(4)}(x)-f''(x)=x^2-x$ ist der Ansatz zur partikulären Lösung: $f_p(x)=$			
	$A\cdot x^2$ ☐	$A_2\cdot x^4+A_1\cdot x^3+A_0\cdot x^2$ ☐	$A_2\cdot x^2+A_1\cdot x$ ☐	$A_2\cdot x^3+A_1\cdot x^2$ ☐
e)	Die höchste Determinante von $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ b^4 & -7\end{pmatrix}$, $b\in\mathbb{R}$ ist:			
	$\det A=38$ ☐	$\det A=0$ ☐	$\det A=-38$ ☐	$\det A=-35$ ☐
f)	$f(x)=x^4-1 \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{C}$ hat wie viele doppelte Nullstellen?			
	0 ☐	1 ☐	2 ☐	4 ☐
g)	$f(x)=\ln(x)-x \quad \mathbb{D}_f=]0,\infty[$ hat ein Maximum an:			
	$x_{\max}=2$ ☐	$x_{\max}=0{,}5$ ☐	$x_{\max}=1$ ☐	keines ☐
h)	Welcher der Punkte liegt nicht in $\varepsilon: -2\cdot x+e\cdot y-z=1$?			
	$M(-2\vert -2/e\vert 1)$ ☐	$M(-1\vert -1/e\vert 2)$ ☐	$M(1\vert 1/e\vert -2)$ ☐	$M(0\vert 0\vert -1)$ ☐
i)	Welche Funktion ist sowohl gerade als auch ungerade?			
	keine ☐	$f(x)=0 \quad \mathbb{D}_f=[0]$ ☐	$f(x)=x \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ ☐	$f(x)=1 \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ ☐
j)	$A=\begin{pmatrix}t^3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$ hat keine Inverse für:			
	$t=2$ ☐	$t=0$ ☐	$t=-2$ ☐	alle t ☐

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (StD. Müller)

a) Bestimmen Sie alle reellen vertikalen und horizontalen Asymptoten von $f(x)=\frac{x+2}{(x-1)^2}$ *(2 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie für $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^4-4\cdot x^2+6 \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$:

b1) alle Nullstellen *(2 Punkte)*,

b2) alle reellen Extrempunkte *(2 Punkte)*,

b3) die Tangentengleichung in $P(1|2{,}5)$ *(2 Punkte)*,

b4) auf drei Nachkommastellen genau die Fläche zwischen $f(x)$ und der x-Achse im Intervall $x\in\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]$ *(2 Punkte)*.

Aufgabe 5 (Wilhelm)

a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ *(2 Punkte)*.

b) Überprüfen Sie die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit *(2 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie $t\in\mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{d}=\begin{pmatrix}t\\3\cdot t\\-4\end{pmatrix}$ und $\vec{e}=\begin{pmatrix}2\cdot t\\2\\5\end{pmatrix}$ orthogonal sind *(2 Punkte)*.

d) Ermitteln Sie einen Normaleneinheitsvektor der Ebene ε mit den Richtungsvektoren $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-8\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}$ *(2 Punkte)*.

e) Bestimmen Sie eine Gerade $\mathcal{G}$, die durch $P(2|0|1)$ verläuft und die parallel zur xy-Ebene verläuft *(2 Punkte)*.

Aufgabe 6 (Mayer)

a) Geben Sie jeweils den Definitionsbereich und die erste Ableitung an:

a1) $f(x) = e^{x^3+5\cdot x}$ *(2 Punkte)*,

a2) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ *(2 Punkte)*.

b) Gegeben sind:

- $f(x) = 2\cdot\cos(x) \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und
- eine lineare Funktion $g(x)$ mit dem y-Achsenabschnitt $b = \frac{1}{2}$, die die x-Achse an der Stelle $x_N = \frac{\pi}{2}$ schneidet.

b1) Zeichnen Sie $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $x \in [0; 2\cdot\pi]$. Achten sie dabei auf korrekte und ausreichende Beschriftung der Achsen *(2 Punkte)*.

b2) Berechnen Sie die Fläche, die im Intervall $x \in [0; \pi]$ zwischen $f(x)$ und $g(x)$ liegt. Runden Sie ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen *(4 Punkte)*.